

# Modélisation d'un défaut limité en vue du contrôle non destructif des multimatériaux anisotropes

ANNE-SOPHIE HOULBERT, ANNE-SOPHIE LAMINE et  
ALAIN DEGIOVANNI

L.E.M.T.A., U.A. 875 CNRS, Ecole des Mines, Parc de Saurupt, 54042 Nancy Cedex, France

(Reçu le 19 mars 1990)

**Résumé**—Afin de détecter les défauts dans les composites ou à l'interface de deux milieux, on modélise les transferts conductifs dans une plaque, comportant un défaut assimilé à une résistance thermique variable spatialement. La méthode utilisée, semi-analytique, est basée sur une discrétisation plus ou moins fine du flux au niveau du défaut. Elle permet deux approches différentes : soit une résolution très précise, soit un calcul très rapide, ce qui est nécessaire pour la détection *in situ*. Dans les cas de géométrie simple, cette méthode est plus performante que les techniques purement numériques.

## 1. INTRODUCTION

DANS LE but de procéder à la détection de défauts dans des matériaux composites par thermographie infrarouge, nous avons modélisé le transfert thermique dans une plaque de matériau comportant un délaminage. La méthode de détection s'applique aussi à des défauts d'adhésion à l'interface de deux milieux.

En effet si la plaque est soumise à un flux de chaleur non permanent (impulsionnel ou périodique) sur l'une de ses faces, la présence d'un défaut (défaut subsurfacique, ou défaut à l'interface) à l'intérieur du matériau induit une perturbation sur le transfert de chaleur à travers la plaque, et par conséquent sur le champ de températures, observé par la caméra infrarouge, soit en face avant, soit en face arrière. La détection thermique se base sur l'analyse de cette perturbation pour localiser et caractériser les défauts internes du matériau.

Les images thermiques permettent aisément de localiser les défauts et de déterminer leur taille. Il est cependant plus difficile d'en déduire leur profondeur et leur importance (résistance thermique). Notre objectif étant une caractérisation complète des défauts subsurfaciques, applicable à la détection *in situ*, il nous faut d'abord élaborer un modèle théorique—mais restant suffisamment simple—qui pourra être comparé aux résultats expérimentaux en vue de leur interprétation.

Nous proposons donc ici une méthode de modélisation des défauts. L'originalité de la méthode est d'être semi-analytique. En effet, après un début de résolution analytique du problème, la discrétisation des flux au niveau du défaut permet de poursuivre la résolution, de manière numérique.

Ainsi, selon l'optique choisie, on obtiendra soit une précision aussi grande que l'on veut, soit au contraire, une résolution très rapide (nécessaire dans le cas de la détection *in situ*).

Nous présentons la méthode générale de modélisation semi-analytique des défauts, ainsi que ses différentes variantes, correspondant aux applications envisagées :

- délaminage dans un matériau composite,
- défaut d'adhésion entre deux matériaux,
- irradiation partielle de la plaque de matériau,
- cas de deux défauts proches,
- prise en compte des échanges avec l'extérieur,
- prise en compte de l'anisotropie du matériau.

## 2. METHODE DE RESOLUTION

### 2.1. Domaine d'application de la méthode

- La technique que nous allons utiliser s'applique :

- en géométrie cylindrique ou en géométrie cartésienne (à deux ou trois dimensions),
- à un système de dimension radiale infinie,
- à des matériaux anisotropes (pourvu que les axes principaux d'anisotropie soient confondus avec les axes de coordonnées),
- à des systèmes présentant des échanges en faces avant et arrière,
- à une irradiation de répartition spatiale et temporelle quelconque,
- à un défaut dont la résistance varie en fonction de l'espace.

- Les défauts à détecter sont généralement des lames d'air, dont l'effet capacitif est négligeable (voir refs. [1, 2]). Il est donc légitime d'assimiler dans notre modèle les défauts à des résistances thermiques pures.

### 2.2. Mise en équation : coordonnées cylindriques

Nous avons choisi de traiter la modélisation, dans une géométrie à symétrie de révolution, du défaut de résistance non uniforme  $R(r)$ , situé à l'interface de

## NOMENCLATURE

$a$	diffusivité thermique de l'échantillon homogène isotrope
$a_i$	diffusivité du milieu $i$ isotrope
$a_{r_i}, a_{z_i}$	diffusivités radiale et axiale du milieu $i$
$b$	rayon du défaut
$c, d$	paramètres de séparation des zones de flux constant (voir 3.2)
$e$	épaisseur totale de l'échantillon
$e_i$	épaisseur du milieu $i$
$f(r, t)$	fonction densité de flux au niveau du défaut
$f_0(r, t)$	densité de flux déposée sur la face avant
$h_1$	coefficient de perte sur la face avant
$h_2$	coefficient de perte sur la face arrière
$J_0$	fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0
$J_1$	fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1
$l$	rayon de l'échantillon
$p$	variable de Laplace
$rf$	rayon d'irradiation dans le cas d'une irradiation partielle
$r, z$	dimensions d'espace
$R(r)$	résistance thermique du défaut dans le cas général
$R_c$	résistance thermique du défaut uniforme
$t$	temps
$\Delta T_{\max}$	contraste maximum (écart maximum entre la température avec défaut et la température sans défaut).

## Symboles grecs

$\alpha_n$	solutions de l'équation transcendante $J_1(\alpha_n l) = 0$
$\theta_i(r, z, p)$	$\mathcal{L}(T_i(r, z, t))$
$\lambda$	conductivité thermique de l'échantillon homogène isotrope
$\lambda_i$	conductivité du milieu $i$ isotrope
$\lambda_{r_i}, \lambda_{z_i}$	conductivités radiale et axiale du milieu $i$
$(\rho c)_i$	capacité calorifique du milieu $i$
$\phi(r, p)$	$\mathcal{L}(f(r, t))$
$\phi_0(r, p)$	$\mathcal{L}(f_0(r, t))$ ( $\phi_0(r)$ dans le cas d'une irradiation de type Dirac)
$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4(p)$	variables définissant le flux au niveau du défaut dans l'approximation du modèle à quatre flux (voir 3.2).

## Grandeurs adimensionnelles

$r^*$	$r/l$
$b^*$	$b/l$
$c^*$	$c/l$
$d^*$	$d/l$
$z^*$	$z/e$
$e_1^*$	$e_1/e$
$\omega_n$	$\alpha_n l$
$p^*$	$(p/a)e^2$
$\beta_0^*$	$\sqrt{p^*}$
$\beta_n^{*2}$	$p^* + \alpha_n^2 e^2$
$B^*$	$b/(e/2)$
$D^*$	$d/(e/2)$
$t^*$	$at/e^2$
$R_c^*$	$R_c/(e/\lambda)_{\text{échantillon}}$
$\Delta T_{\max}^*$	$\Delta T_{\max}/T_{\max}$
$\theta_i^*$	$\theta_i \lambda / \phi_0 e$

deux milieux 1 et 2, à une profondeur  $e_1$  (de la face recevant le flux).

L'irradiation est répartie de façon quelconque sur la face avant (en  $z = e_1$ ). Des échanges ont lieu au niveau des faces avant ( $h_1$ ) et arrière ( $h_2$ ) (voir Fig. 1).

Le système à résoudre pour ce type de problème est le suivant :

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad i = 1 \text{ et } 2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \text{ et } 1, i = 1 \text{ et } 2 \quad (2)$$

$$h_1 T_1 + \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = f_0(r, t) \quad \text{en } z = e_1 \quad (3)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = h_2 T_2 \quad \text{en } z = -e_2 \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \quad (5)$$

$$T_1 - T_2 = R(r) \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \quad (6)$$

$$T_i = 0 \quad \text{à } t = 0, i = 1 \text{ et } 2 \quad (7)$$

(avec  $a_i$  et  $\lambda_i$ , respectivement diffusivité et conductivité thermiques du milieu  $i$ ;  $f_0(r, t)$  irradiation de la face avant;  $R(r)$  résistance de l'interface au rayon  $r$ ).

Ce problème transitoire, bidirectionnel à deux milieux n'est pas soluble directement pas des méthodes analytiques.

## 2.3. Technique de résolution

La technique de résolution utilisée est la méthode dite "fluxmétrique".

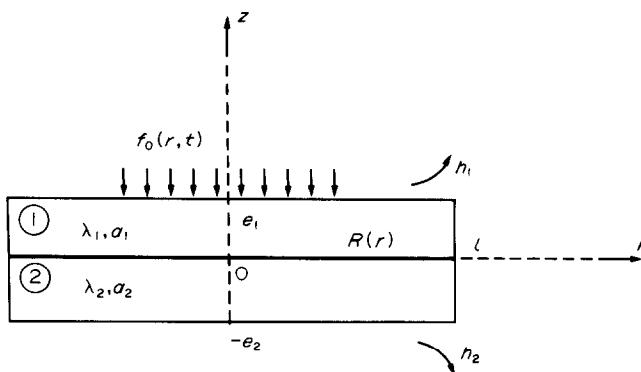


FIG. 1. Défaut quelconque à l'interface d'un bicouche cylindrique recevant un flux quelconque.

- On sépare le système de part et d'autre de la résistance de contact, en deux systèmes indépendants, un relatif au milieu 1, l'autre relatif au milieu 2.

- Sur la frontière commune, on impose une condition de densité de flux (d'où le nom de la méthode).

*Remarque.* Pour une présentation plus générale de cette méthode, qui consiste à séparer le système en deux et à imposer à l'interface, soit une condition de densité de flux—comme dans notre cas—soit une condition en température, on peut se référer aux travaux de Beck et Keltner [3].

Le système 1 s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \text{ et } l \quad (9)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = f_1(r, t) \quad \text{en } z = e_1 \quad (10)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = f(r, t) \quad \text{en } z = 0 \quad (11)$$

$$T_1 = 0 \quad \text{à } t = 0. \quad (12)$$

Le système 2 s'écrit de façon analogue avec en particulier pour satisfaire l'égalité des densités de flux en  $z = 0$  (équation (5)) :

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = f(r, t) \quad \text{en } z = 0.$$

Enfin, la condition de passage en température à l'interface s'écrit :

$$T_2 - T_1 = R(r)f(r, t) \quad \text{en } z = 0.$$

Il est alors possible de résoudre analytiquement les systèmes 1 et 2 (par séparation des variables par exemple) ; nous avons choisi d'effectuer une transformation de Laplace sur la variable temps :

$$T_i(r, z, t) \rightarrow \theta_i(r, z, p)$$

$$f(r, t) \rightarrow \phi(r, p)$$

$$f_0(r, t) \rightarrow \phi_0(r, p).$$

On obtient alors les transformées de Laplace des températures  $\theta_i(r, z, p)$  pour les milieux 1 et 2, sous forme de séries dont les coefficients dépendent de la transformée de Laplace de la densité de flux à l'interface  $\phi(r, p)$ . Le calcul est présenté en annexe A.

La détermination de  $\phi(r, p)$  se fait en utilisant la condition de passage en température qui s'écrit, après transformation de Laplace :

$$\theta_2(r, 0, p) - \theta_1(r, 0, p) = R(r)\phi(r, p) \quad (13)$$

et dans laquelle on reporte les expressions de  $\theta_1$  et de  $\theta_2$  en fonction de  $\phi(r, p)$ . On obtient ainsi une équation intégrale à noyau dégénéré dont il n'existe pas, en général, de solution analytique.

Notre méthode cesse donc, à ce niveau, d'être purement analytique : l'équation intégrale en  $\phi(r, p)$  doit se résoudre numériquement.

Pour résoudre l'équation intégrale, il existe deux façons de procéder, selon l'objectif à atteindre :

(1) On recherche une solution très précise : il faut alors résoudre l'équation intégrale *finement* (par éléments finis, éventuellement).

*Remarque.* On notera qu'il est possible de résoudre le problème 2D de manière complètement numérique.

Mais il est plus intéressant de mener le calcul analytique préliminaire : on économise ainsi une dimension pour le calcul numérique, d'où un gain de temps de calcul considérable (en coordonnées cylindriques, on passe d'un problème 2D—en  $r$  et  $z$ —à un problème 1D—en  $r$ ).

(2) On recherche une solution approchée, pouvant être calculée *rapidement*.

On assimile alors  $\phi(r)$  à une fonction en escaliers, et on vérifie l'équation (13) en valeur moyenne sur chaque palier.

Dans la suite, nous nous intéressons plutôt à cette deuxième façon de procéder, qui permet de faire du contrôle non destructif en temps réel.

Remarquons ici qu'un compromis devra être trouvé

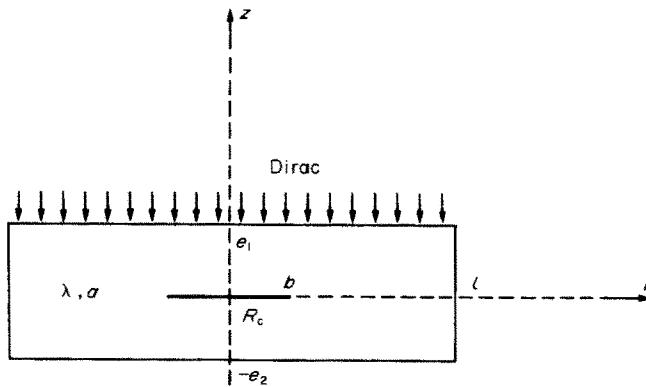


FIG. 2. Matériau isotrope muni d'un défaut de rayon  $b$ , et uniformément irradié par un Dirac de flux.

entre une discrétisation fine de  $\phi(r)$  qui va demander un temps de calcul relativement long et une discrétisation trop grossière qui donnera un résultat trop éloigné de la réalité.

### 3. EXEMPLE DE RESOLUTION NUMERIQUE

On donne ici un exemple de résolution approchée de l'équation intégrale:  $\phi(r)$  est assimilé à une fonction constante par morceaux.

#### 3.1. Optimisation du nombre et de la répartition des intervalles

Afin de mettre au point la méthode et de pouvoir observer l'influence des différents paramètres, nous avons traité différents cas d'approximation. Le cas le plus simple est celui où le défaut a une résistance thermique infinie et où la densité de flux à l'interface est supposée uniforme en dehors du défaut. Cette approximation est dite "un flux" et "défaut parfait". Puis on considère le même défaut mais la densité de flux constante sur deux intervalles ou plus. On considère ensuite un défaut ayant une résistance thermique finie en faisant l'hypothèse de 1 à 10 intervalles de flux au niveau du défaut, ainsi qu'en dehors du défaut. Il s'agit d'optimiser cette répartition des flux, afin d'obtenir un compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

Les approximations où l'on considère un défaut de résistance infinie permettent d'abord d'optimiser la répartition des intervalles de flux en dehors du défaut, puis, en introduisant le défaut de résistance finie, on optimise la répartition des intervalles de flux sur le défaut. Les répartitions qui présentent un grand nombre d'intervalles permettent de juger de la précision des résultats et servent de référence pour optimiser le choix des intervalles pour les répartitions plus grossières (voir réf. [2]).

A titre d'exemple—et parce que cette configuration représente un bon compromis entre la précision et la rapidité de calcul—nous présentons l'approximation

"quatre flux". Nous utiliserons principalement cette configuration pour nos simulations numériques.

#### 3.2. Le modèle à quatre flux

On se place dans le cas particulier où (voir Fig. 2) :

- les milieux 1 et 2 sont identiques,
- l'irradiation est un Dirac de flux, uniformément réparti sur la face avant,
- les pertes sont nulles en face avant et en face arrière,
- à l'interface, on a un défaut de rayon  $b$ , de résistance uniforme  $R_c$ , et un contact parfait hors du défaut.

Le modèle réalisant le meilleur compromis exactitude—rapidité de calcul est le modèle dit à quatre flux (Fig. 3).

On introduit deux paramètres qui permettent de définir les intervalles de flux constant au niveau de l'interface :

- le rayon  $d$  partageant en deux la zone défectueuse,
- le rayon  $c$  partageant en deux la zone saine.

Afin d'obtenir un modèle à quatre flux satisfaisant, il faut optimiser  $c$  et  $d$  (voir paragraphe ci-dessus pour l'optimisation).

On admettra conformément à la référence [2] que les valeurs optimales sont :

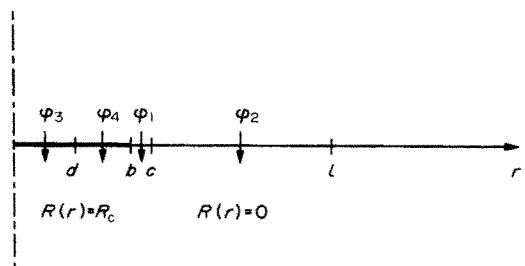


FIG. 3. Modèle à 4 flux : schéma de la répartition des flux au niveau du défaut.

$$d = b/2$$

$$c = b + 0,1325e$$

où  $e$  est l'épaisseur totale de l'échantillon.

La fonction flux  $\phi$  est supposée constante par morceaux :

$$\phi(r) = \phi_3 \quad 0 < r \leq d$$

$$\phi(r) = \phi_4 \quad d < r \leq b$$

$$\phi(r) = \phi_1 \quad b < r \leq c$$

$$\phi(r) = \phi_2 \quad c < r \leq 1.$$

On vérifie l'équation de passage (13) en valeur moyenne sur chacun des quatre intervalles. On peut ainsi calculer  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ . Les calculs sont présentés dans l'annexe B.

On reporte alors ces valeurs dans les expressions des champs de température (données en fonction de  $\phi(r, p)$  en annexe A). On peut ainsi obtenir des valeurs approchées des champs de température face avant ou face arrière.

*Remarque.* En ce qui concerne la programmation, les modèles ont été écrits en langage Pascal sur compatible PC ; pour les fonctions de Bessel nous avons utilisé les approximations polynomiales de Allen [4] ; pour la transformation inverse de Laplace c'est la méthode de Stehfest [5] qui a été mise en oeuvre.

#### 4. RESULTATS DE SIMULATIONS NUMERIQUES

##### 4.1. Justification du modèle à 4 flux

La Fig. 4 donne les répartitions de flux entre le centre et le bord d'un échantillon comportant un défaut à l'interface. Sont présentées :

- la répartition du flux approchée finement par un modèle à 19 flux,
- la répartition de flux obtenue avec le modèle à 4 flux.

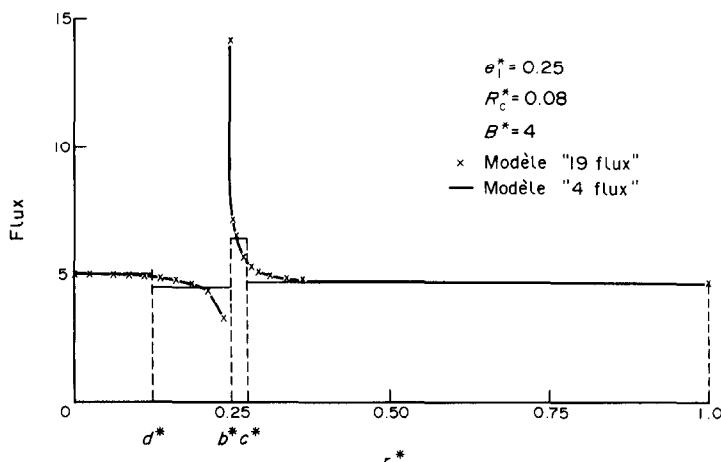


FIG. 4. Répartition des flux au niveau du défaut entre le centre et le bord de l'échantillon : obtenue avec le modèle à 19 flux ; obtenue avec le modèle à 4 flux.

La seconde répartition est une approximation grossière de la première. Pourtant, nous avons constaté que le modèle à 4 flux donne des résultats satisfaisants sur les champs de températures.

A titre d'exemple, nous représentons sur la Fig. 5 le profil de température obtenu pour les deux types de modélisation : à 4 flux et à 19 flux.

*Remarque.* La "bosse" observée sur le profil obtenu avec le modèle à 4 flux montre les limites du modèle.

##### 4.2. Simulations : profils et thermogrammes

Les simulations sont faites pour un échantillon homogène et anisotrope ( $\lambda_{\text{radial}}/\lambda_{\text{axial}} = 3,5$ ).

4.2.1. *Profils.* Ils donnent la distribution spatiale de température (de  $r = 0$  à 1) à un instant donné. A titre d'exemple, les Figs. 6 et 7 sont obtenues à l'instant où le contraste est maximum, respectivement pour les faces avant et arrière.

Nous représentons les profils obtenus dans un échantillon muni d'un défaut en son milieu :

- de résistance de contact réduite :

$$R_c^* = \frac{R_c}{(e/\lambda)_{\text{échantillon}}} = 0,08,$$

- d'extension réduite variable

$$B^* = \frac{b}{e/2}.$$

*Remarque.* Les profils permettent d'obtenir une bonne approximation de la taille du défaut, en relevant l'abscisse du point ayant pour ordonnée le demi-maximum de la courbe.

4.2.2. *Thermogrammes.* A titre d'exemple les Figs. 8 et 9 donnent respectivement pour les faces avant et arrière le contraste réduit ( $\Delta T/T_{\text{max}}$ ) en fonction du temps réduit (nombre de Fourier  $at/e^2$ ) pour un échantillon muni d'un défaut en son milieu :

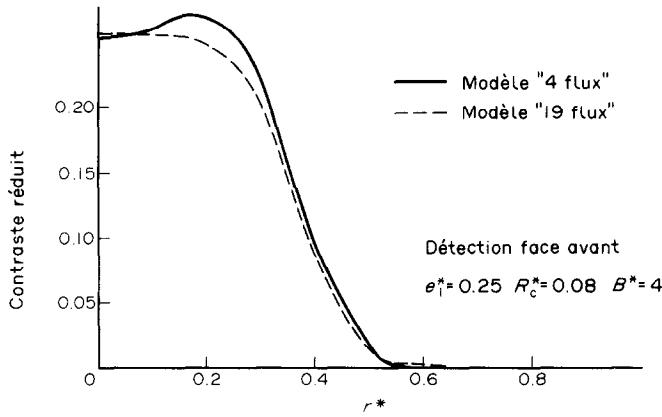


FIG. 5. Profils de température: variation du contraste réduit  $\Delta T/T_{\max}$  en fonction du rayon réduit  $r^* = r/l$  pour les modèles à 4 flux et à 19 flux.

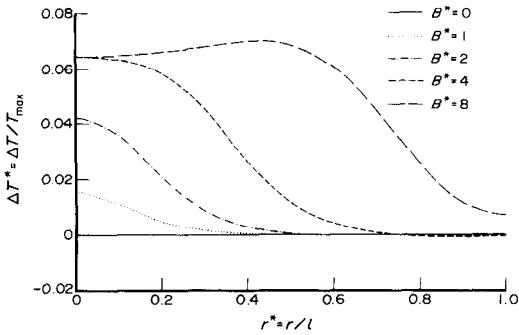


FIG. 6. Profils. Contraste réduit en fonction du rayon réduit obtenu avec un matériau anisotrope muni d'un défaut de résistance de contact fixée, d'extension variable. Observation face avant.

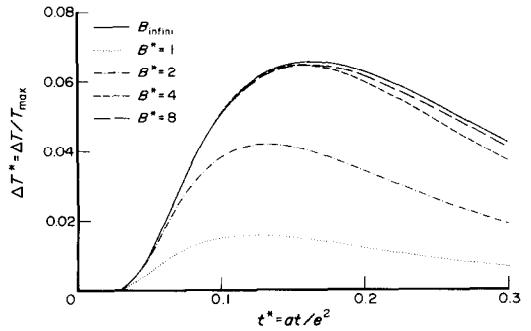


FIG. 8. Thermogrammes. Contraste réduit en fonction du temps réduit obtenu avec un matériau anisotrope muni d'un défaut de résistance de contact fixée, d'extension variable. Observation face avant, au centre.

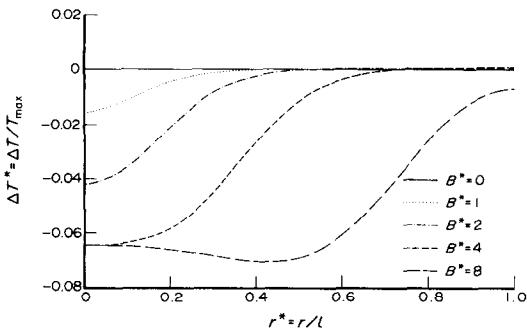


FIG. 7. Profils. Contraste réduit en fonction du rayon réduit obtenu avec un matériau anisotrope muni d'un défaut de résistance de contact fixée, d'extension variable. Observation face arrière.

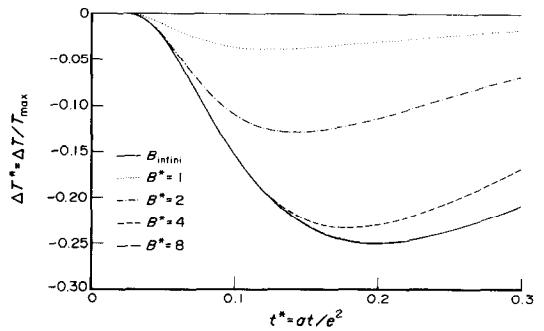


FIG. 9. Thermogrammes. Contraste réduit en fonction du temps réduit obtenu avec un matériau anisotrope muni d'un défaut de résistance de contact fixée, d'extension variable. Observation face arrière, au centre.

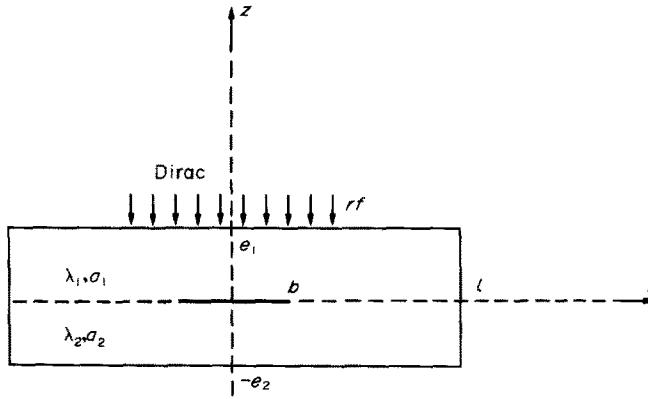


FIG. 10. Bicouche muni d'un défaut partiellement irradié par un Dirac de flux.

- de résistance de contact réduite:  $R_c^* = 0,08$ ,
- d'extension réduite variable  $B^* = b/(e/2)$ .

Nous pouvons remarquer sur ce réseau de courbes l'effet bidirectionnel des défauts d'extension limitée. En particulier, le contraste maximum et—dans une moindre mesure—l'instant lui correspondant diminuent nettement quand l'extension du défaut diminue.

Afin d'illustrer cet effet bidirectionnel, nous donnons des résultats expérimentaux obtenus avec des échantillons de carbone—époxy de 2 mm d'épaisseur, munis d'un défaut (pastille carrée de téflon, d'épaisseur 50  $\mu\text{m}$ ).

- Cas n° 1 : pastille de 10 mm de côté  
Résultats expérimentaux :

$$\frac{\Delta T_{\max}}{T_{\max}} = 0,121$$

$$t_{\max}^* = \frac{at_{\max}}{e^2} = 0,163$$

(a et e respectivement diffusivité et épaisseur de l'échantillon de composite).

- Cas n° 2 : pastille de 4 mm de côté

$$\frac{\Delta T_{\max}}{T_{\max}} = 0,062$$

$$t_{\max}^* = 0,136.$$

Signalons que dans le cas n° 1, le défaut est assimilable à un défaut étendu. Mais dans le cas n° 2, l'effet 2D se fait nettement sentir.

### 5. RESULTATS DE SIMULATIONS DANS DES CAS PLUS PARTICULIERS

#### 5.1. Prise en compte de l'irradiation partielle

Il est difficile expérimentalement de réaliser un éclairage uniforme sur une grande surface. D'où l'intérêt de modéliser une irradiation du flash localisée (Fig. 10).

Au niveau des calculs, on utilise les résultats de

l'annexe A, puis on procède comme dans l'annexe B, en prenant comme fonction d'irradiation  $\phi_0$  :

$$\phi_0(r, p) = \phi_0 \quad r \leq rf$$

$$\phi_0(r, p) = 0 \quad r > rf.$$

Afin de découpler les effets bidimensionnels, nous avons fait des simulations avec un défaut étendu à l'interface d'un bicouche en alliage d'aluminium côté face avant et alliage de titane côté face arrière.

L'observation est faite en face avant (Fig. 11). On observe nettement l'influence du rayon d'irradiation.

*Remarque.* Ces résultats ont été comparés à la solution analytique exacte du multicouche partiellement irradié. Nous avons observé un écart (d'autant plus significatif que le rayon d'irradiation est petit). Cet écart montre que le modèle à quatre flux est insuffisamment précis dans le cas de l'irradiation partielle. Pour obtenir de meilleurs résultats, il faudrait faire une

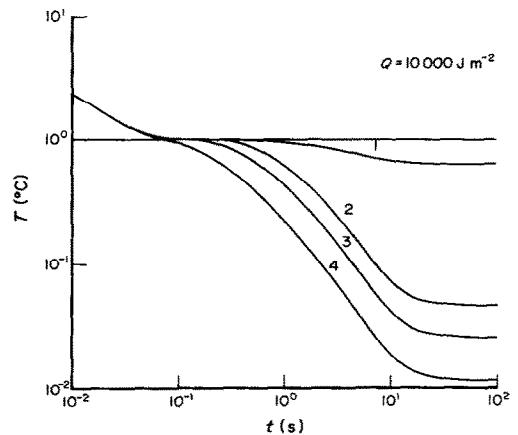


FIG. 11. Température de la face avant au centre. Irradiation partielle, défaut d'extension limitée (30  $\mu\text{m}$  d'air). Bicouche : milieu 1 constitué de 4 mm d'alliage d'aluminium ; milieu 2 constitué de 2 mm d'alliage de titane. 1, irradiation totale ; 2,  $rf/r = 0,27$  ; 3,  $rf/r = 0,2$  ; 4,  $rf/r = 0,13$ .

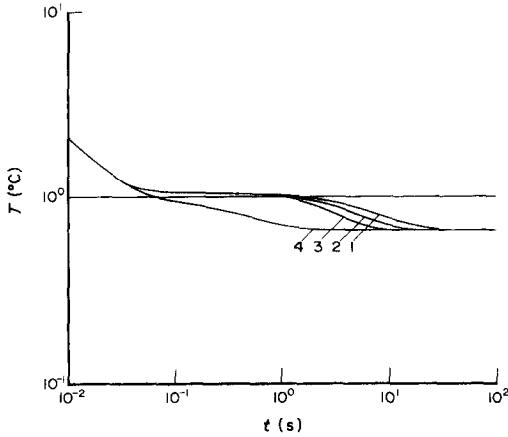


FIG. 12. Température de la face avant au centre. Bicouche alliage d'aluminium/alliage de titane. Irradiation totale. Défaut de  $50 \mu\text{m}$ , d'extension réduite  $2b/e = 11$ . 1, quadripôle  $50 \mu\text{m}$  d'air; 2, défaut entouré de  $10 \mu\text{m}$  d'air; 3, défaut entouré de  $0 \mu\text{m}$ ; 4, quadripôle sans défaut.

discrétisation plus fine du flux à l'interface tenant compte, en particulier, du rayon d'irradiation.

### 5.2. Défaut entouré par une résistance de contact

Il paraît réaliste de penser que les défauts de collage sont au milieu d'une zone à faible résistance de contact uniforme (et non pas au milieu d'une zone à contact parfait). La présence de cette résistance de contact de fond modifie fortement le transfert de chaleur et l'on tend vers un transfert unidirectionnel (Fig. 12).

### 5.3. Cas de deux défauts proches

5.3.1. *Remarque sur les coordonnées cartésiennes.* Les coordonnées cylindriques présentent l'avantage de pouvoir traiter un problème tridirectionnel avec seulement deux coordonnées ( $r$  et  $z$ ), en modélisant le défaut par un disque de rayon  $b$ . On utilise donc ce type de modélisation dans la plupart des calculs.

Dans certains cas, cependant, la modélisation en coordonnées cartésiennes peut être avantageuse, les modèles ont donc été écrits pour les deux systèmes de coordonnées.

Si on traite le problème en coordonnées cartésiennes, on doit en général utiliser trois coordonnées ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ), sauf si on représente les défauts comme des bandes de largeur  $2b$  et de longueur infinie, ce qui peut suffire dans certains cas. Cette approche permet en particulier une étude simple du cas de deux défauts proches en influence mutuelle.

5.3.2. *Défauts proches en influence mutuelle.* Nous avons considéré le cas de deux défauts proches, afin de voir s'il est possible de les détecter séparément, ou s'ils sont "vus" comme un seul grand défaut.

Par souci de simplicité et de rapidité de calcul, nous avons utilisé le modèle à quatre flux, dans la version coordonnées cartésiennes, et modifié: la résistance thermique de contact est entre  $d$  et  $b$  au lieu d'être

entre 0 et  $b$ . Il n'y a plus qu'un intervalle de flux à gauche du défaut et sur le défaut (voir Fig. 13).

Le modèle à quatre flux appliqué à deux défauts est donc plus grossier que lorsqu'il est appliqué au défaut unique.

Pour vérifier la validité des résultats, nous avons utilisé le modèle à dix-neuf flux (6 intervalles de flux à gauche du défaut, 6 sur le défaut et 7 à droite du défaut). La différence entre les deux résultats n'excède pas 10%, on peut donc se satisfaire du modèle à quatre flux.

Des séries de profils (correspondant à différents espacements entre les deux défauts) ont été tracées pour deux tailles de défaut (voir Fig. 14):  $B^* - D^* = 1$  et 2, pour  $R_c^* = 0,08$  (soit  $10 \mu\text{m}$  d'air, si  $e = 4 \text{ mm}$ ). On en déduit que la séparation est d'autant meilleure que les défauts sont grands. Il faut noter que les défauts de taille  $B^* - D^* = 1$  correspondent aux défauts uniques tels que  $B^* = 1$  (voir Figs. 6 à 9), pour lesquels le transfert de chaleur est assez fortement bidirectionnel et qui sont de ce fait plus difficiles à caractériser.

Dans le cas des deux défauts de largeur  $B^* - D^* = 1$ , on a aussi tracé les séries de profils pour d'autres valeurs de la résistance thermique et on a mis en évidence que la séparation est indépendante de la résistance thermique.

La méthode a donc un bon pouvoir de séparation: on peut détecter les deux défauts dès que la distance qui les sépare est supérieure ou égale à la moitié de leur dimension.

### 5.4. Prise en compte des échanges avec l'extérieur

La méthode fluxmétrique permet de prendre en compte les échanges avec l'extérieur, d'une part au niveau de la face avant, d'autre part au niveau de la face arrière.

### 5.5. Influence de l'anisotropie des matériaux

Pour deux milieux anisotropes, l'équation de la chaleur s'écrit:

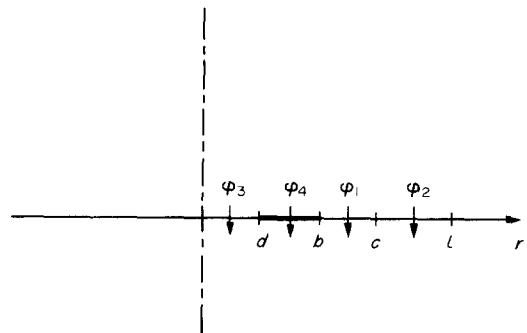


FIG. 13. Deux défauts en influence mutuelle: schéma de la répartition de flux au niveau des défauts pour le modèle à 4 flux.

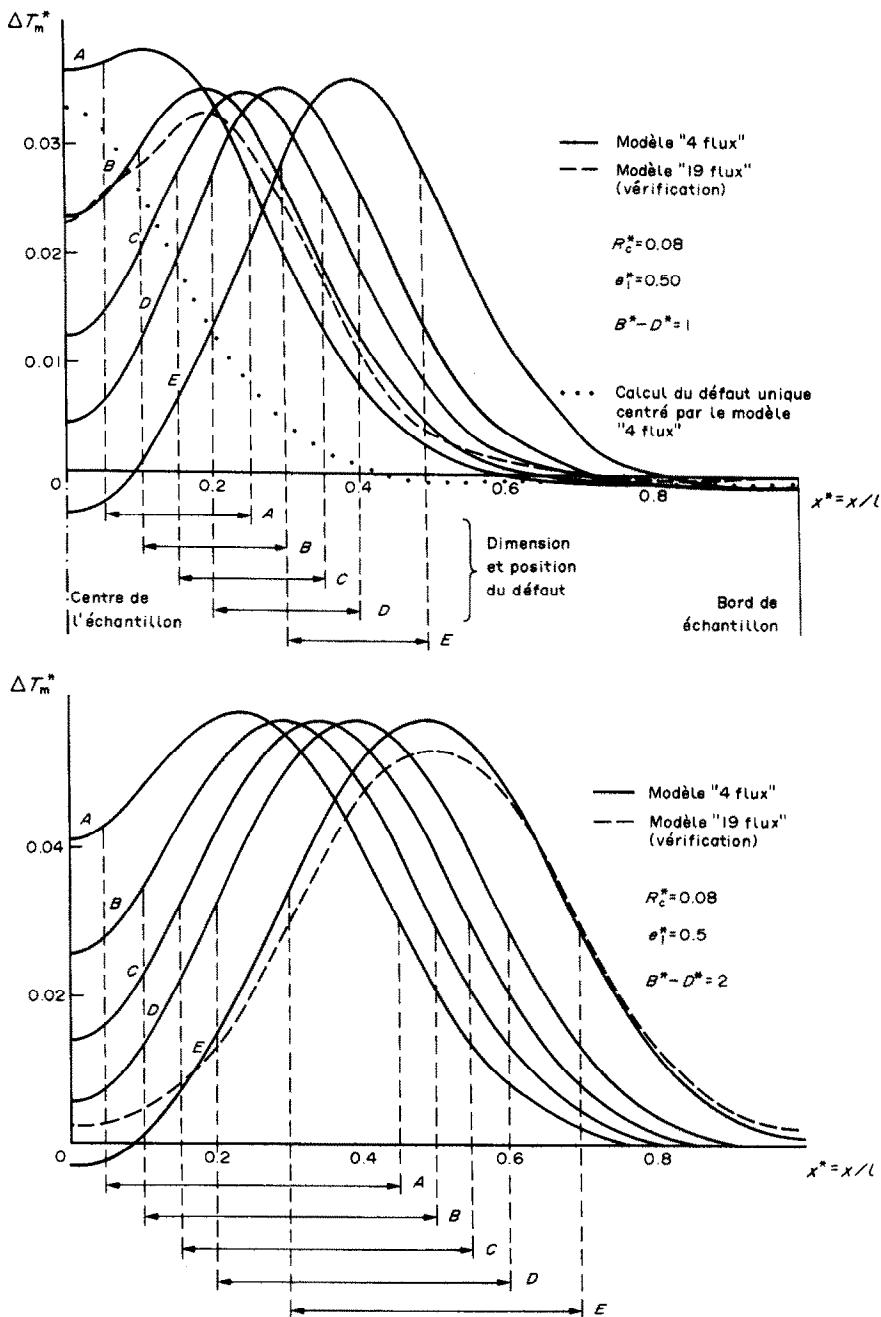


FIG. 14. Profils pour deux défauts en influence mutuelle dans un matériau anisotrope ( $\lambda_{\text{radial}}/\lambda_{\text{axial}} = 3,5$ ). Tracé du contraste réduit en fonction de l'abscisse réduite: pour 2 tailles de défauts  $B^* - D^* = 1$  ou 2; à l'instant où le contraste est maximum; le défaut étant centré en profondeur (le contraste est donc le même en observation face avant ou face arrière).

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_{zi} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + a_{ri} \left( \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right)$$

$a_{ri}$  et  $a_{zi}$  étant respectivement les diffusivités selon l'axe  $r$  et l'axe  $z$  du matériau  $i$ .

On se ramène aux cas milieux isotropes par un simple changement de variable (voir annexe A—fin).

La Fig. 15 illustre un exemple d'anisotropie.

### 6. CONCLUSION

Nous avons présenté une technique de calcul permettant de modéliser un transfert purement conductif dans un échantillon monocouche comportant un délaminage, ou dans un échantillon bicouche avec une résistance de contact (variable spatialement) à l'interface des deux milieux—la technique peut s'étendre

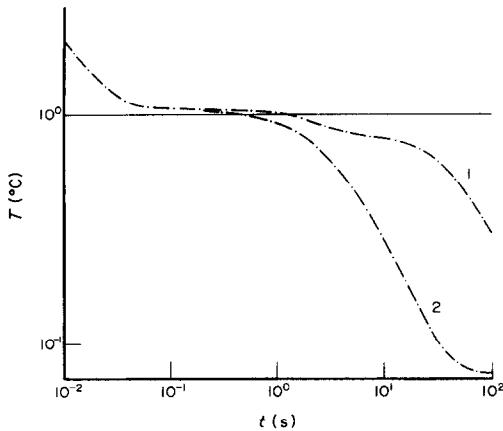


FIG. 15. Température de la face avant au centre. Bicouche en alliage d'aluminium/alliage de titane. Irradiation partielle:  $rf/l = 0,33$ . Défaut étendu de  $50 \mu\text{m}$  d'air. 1, thermogramme obtenu pour le bicouche en alliage Al-Ti, chaque alliage étant isotrope; 2, thermogramme obtenu pour des alliages anisotropes:  $\lambda_r(\text{Al}) = 10\lambda_z(\text{Al})$ ,  $\lambda_r(\text{Ti}) = 10\lambda_z(\text{Ti})$ .

à un multicouche. Les milieux sont éventuellement anisotropes et peuvent présenter des échanges avec le milieu extérieur.

La technique utilisée comporte cinq niveaux :

- méthode "fluxmétrique",
- transformée de Laplace,
- séparation des variables d'espace,
- résolution d'une équation intégrale numérique,
- transformée inverse numérique.

Les 3 premiers sont purement analytiques, ils permettent d'une part de réduire le nombre de dimensions d'espace au niveau du calcul numérique (résolution de l'équation intégrale) et d'autre part d'adimensionner le problème.

Cette technique permet deux approches très différentes :

—un calcul très précis, par une discrétisation très fine ou même par l'utilisation de méthodes numériques plus sophistiquées, au niveau de la résolution de l'équation intégrale (éléments finis par exemple),

—un calcul très rapide (pour une identification en temps réel par exemple) par une résolution grossière de l'équation intégrale, qui permet néanmoins de retrouver un champ de température correct sur la surface de l'échantillon.

Dans une géométrie simple—ce qui est le cas pour une plaque plane composée d'un ou de deux matériaux, comportant un défaut—cette méthode est plus avantageuse que l'utilisation d'un code numérique.

Par contre, dès que la géométrie devient plus complexe, la méthode proposée n'est plus applicable et on doit avoir recours à un code numérique.

En conclusion, l'outil de simulation que nous avons décrit ici permet déjà d'envisager des situations très

variées proches de nombreuses conditions expérimentales en CND par thermographie infrarouge :

- détection de délaminages dans les matériaux composites,
- détection de défauts de collage ou d'adhésion entre deux matériaux différents,
- mesure globale de résistance de contact à l'interface de deux matériaux différents.

D'autre part, des développements peuvent encore être apportés sans difficulté supplémentaire comme par exemple l'absorption d'énergie interne.

## REFERENCES

1. A. S. Lamine, P. Perre et A. Degiovanni, Modélisation des défauts sulyenfaciés et technique d'identification: application à des matériaux composites Journées S.F.T. et G.U.T., Paris, 24 Janvier (1990).
2. A. S. Lamine, Caractérisation de défauts dans les matériaux composites par thermographie infrarouge, Thèse INPL (novembre 1988).
3. J. V. Beck and N. R. Keltner, Unsteady surface element method, *J. Heat Transfer* **103**, 759-764 (1981).
4. E. E. Allen, Analytical approximations, *Math. Tables Aids Comp.* **8**, 240-241 (1954).
5. H. Stehfest, Algorithm 368, Numerical inversion of Laplace transforms, *ACM* **13**(1), 47-49 (1970).

## ANNEXE A. CAS DE DEUX MILIEUX EN CONTACT IMPARFAIT. EXPRESSION DES CHAMPS DE TEMPERATURE DANS LES DEUX MILIEUX, EN FONCTION DE $\phi(r, p)$ : DENSITE DE FLUX IMPOSEE A L'INTERFACE

On étudie le transfert de chaleur dans la bicouche, dans le cas très général où (voir Fig. 1):

—la répartition spatio-temporelle de l'irradiation est quelconque: on note  $f_0(r, t)$  la densité de flux déposée,

—à l'interface, la résistance de contact n'est pas uniforme:  $R(r)$ ,

—on prend en compte les échanges au niveau des faces avant ( $h_1$ ) et arrière ( $h_2$ ).

Pour le milieu  $i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ), de conductivité  $\lambda_i$ , de diffusivité  $a_i = \lambda_i/(\rho c)_i$ , l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial T_i}{\partial t}$$

$T_i$  étant l'élevation de température par rapport à la température initiale (égale à la température ambiante).

Ecrivons le système correspondant au milieu 1

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t}$$

$$z = e_1 \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + h_1 T_1 = f_0(r, t)$$

$$r = 0 \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad (\text{par symétrie})$$

$$r = l \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad (\text{faces latérales isolées})$$

$$t = 0 \quad T_1 = 0.$$

De même, pour le milieu 2

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t}$$

$$z = -e_2 \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} - h_2 T_2 = 0$$

$$r = 0 \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0$$

$$r = l \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0$$

$$t = 0 \quad T_2 = 0.$$

Conditions de passage (en  $z = 0$ )

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$T_1 - T_2 = R(r) \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}$$

où  $R(r)$  est la résistance de contact à l'interface au rayon  $r$ .

Afin de résoudre le problème, on applique la "méthode fluxmétrique": on remplace la condition de passage en flux par une double condition de flux imposé :

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = f(r, t) & \text{(A1)} \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = f(r, t). & \text{(A2)} \end{cases}$$

On rajoute alors l'équation (A1) comme condition aux limites dans le système correspondant au milieu 1 et l'équation (A2) dans le système correspondant au milieu 2.

Les deux systèmes, alors découplés, sont directement solubles en fonction de  $f(r, t)$  par :

- transformation de Laplace,
- séparation des deux variables d'espace  $r$  et  $z$ .

Remarque. Pour les transformées de Laplace, on adopte les notations suivantes :

$p$ : variable de Laplace

$$\theta_1 = \mathcal{L}(T_1)$$

$$\theta_2 = \mathcal{L}(T_2)$$

$$\phi_0 = \mathcal{L}(f_0)$$

$$\phi = \mathcal{L}(f).$$

(1) Résolution pour le milieu 1

Dans l'espace de Laplace, le système s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \frac{1}{a_1} (p\theta_1 - 0)$$

$$z = e_1 \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + h_1 \theta_1 = \phi_0(r, p)$$

$$z = 0 \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \phi(r, p)$$

$$r = 0 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = 0$$

$$r = l \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = 0.$$

Ce système est non homogène. Pour le résoudre, on cherche une solution sous la forme :  $\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12}$ , où  $\theta_{11}$  et  $\theta_{12}$  présentent des conditions aux limites simplifiées et constituent chacun un problème homogène traité directement par séparation des variables  $r$  et  $z$ .

On trouve :

$$\theta_{11} = A_0 \cosh \beta_{01} z + \sum_{n \geq 1} A_n \cosh \beta_{n1} J_0(\alpha_n r)$$

avec

$$\beta_{01} = \sqrt{\left(\frac{p}{a_1}\right)}$$

$$A_0 = \frac{\frac{2}{l^2} \int_0^l \phi_0(r, p) r \, dr}{\lambda_1 \beta_{01} \sinh \beta_{01} e_1 + h_1 \cosh \beta_{01} e_1}$$

$$\beta_{n1} = \frac{p}{a_1} + \alpha_n^2$$

$\alpha_n$ : solutions de l'équation transcendante  $J_1(\alpha_n l) = 0$

$$A_n = \frac{\frac{2}{l^2} \int_0^l r \phi_0(r, p) J_0(\alpha_n r) \, dr}{(\lambda_1 \beta_{n1} \sinh \beta_{n1} e_1 + h_1 \cosh \beta_{n1} e_1) J_0^2(\alpha_n l)}$$

$$\theta_{12} = B_{01} \left[ -\frac{(\lambda_1 \beta_{01} \cosh \beta_{01} e_1 + h_1 \sinh \beta_{01} e_1)}{\lambda_1 \beta_{01} \sinh \beta_{01} e_1 + h_1 \cosh \beta_{01} e_1} \right.$$

$$\times \cosh \beta_{01} z + \sinh \beta_{01} z \left. \right] + \sum_{n \geq 1} B_{n1}$$

$$\times \left[ -\frac{(\lambda_1 \beta_{n1} \cosh \beta_{n1} e_1 + h_1 \sinh \beta_{n1} e_1)}{\lambda_1 \beta_{n1} \sinh \beta_{n1} e_1 + h_1 \cosh \beta_{n1} e_1} \right.$$

$$\times \cosh \beta_{n1} z + \sinh \beta_{n1} z \left. \right] J_0(\alpha_n r)$$

avec

$$B_{01} = \frac{\frac{2}{l^2} \int_0^l \phi(r, p) r \, dr}{\lambda_1 \beta_{01}}$$

$$B_{n1} = \frac{\frac{2}{l^2} \int_0^l r J_0(\alpha_n r) \phi(r, p) \, dr}{\lambda_1 \beta_{n1} J_0^2(\alpha_n l)}$$

Et la solution générale dans le milieu 1 est :

$$\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12}.$$

(2) Résolution pour le milieu 2

Le système, après transformation de Laplace, s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} = \frac{1}{a_2} (p\theta_2 - 0)$$

$$z = 0 \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \phi(r, p)$$

$$z = -e_2 \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - h_2 \theta_2 = 0$$

$$r = 0 \text{ ou } l \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial r} = 0.$$

La solution générale, dans le milieu 2, s'écrit :

$$\theta_2 = B_{02} \left[ -\frac{(\lambda_2 \beta_{02} \cosh \beta_{02} e_2 + h_2 \sinh \beta_{02} e_2)}{\lambda_2 \beta_{02} \sinh \beta_{02} e_2 + h_2 \cosh \beta_{02} e_2} \right.$$

$$\times \cosh \beta_{02} z + \sinh \beta_{02} z \left. \right] + \sum_{n \geq 1} B_{n2}$$

$$\times \left[ -\frac{(\lambda_2 \beta_{n2} \cosh \beta_{n2} e_2 + h_2 \sinh \beta_{n2} e_2)}{\lambda_2 \beta_{n2} \sinh \beta_{n2} e_2 + h_2 \cosh \beta_{n2} e_2} \right.$$

$$\times \cosh \beta_{n2} z + \sinh \beta_{n2} z \left. \right] J_0(\alpha_n r)$$

avec

$$\beta_{0,2} = \sqrt{\left(\frac{p}{a_2}\right)}$$

$$\beta_{n,2} = \frac{p}{a_2} + \alpha_n^2$$

$$B_{0,2} = \frac{2}{l^2} \int_0^l \phi(r, p) r \, dr$$

$$B_{n,2} = \frac{2}{l^2} \int_0^l r \phi(r, p) J_0(\alpha_n r) \, dr \frac{1}{\lambda_2 \beta_{n,2} J_0^2(\alpha_n l)}$$

*Remarque.* Extension aux milieux anisotropes.

Dans les calculs précédents, les milieux étaient isotropes : pour  $i = 1, 2$  :  $\lambda_{ri} = \lambda_{zi} = \lambda_i$ .

Supposons maintenant que :

$$\lambda_{ri} = K_i \lambda_{zi} = K_i \lambda_i$$

soit

$$a_{ri} = K_i a_{zi} = K_i a_i$$

Pour généraliser les résultats précédents aux milieux anisotropes, il suffit d'écrire :

$$\beta_{ni} = \frac{p}{a_{zi}} + \frac{\lambda_{ri}}{\lambda_{zi}} \alpha_n^2$$

**ANNEXE B. EXEMPLE DE CALCUL RELATIF AU MODELE A 4 FLUX**

*Hypothèses (voir Fig. 2)*

- Les milieux 1 et 2 sont identiques, de conductivité  $\lambda$ , de diffusivité  $a$ .

On aura ainsi :

$$\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0 = \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)}$$

$$\beta_{n1}^2 = \beta_{n2}^2 = \beta_n^2 = \frac{p}{a} + \alpha_n^2$$

- Les faces avant et arrière sont isolées ( $h_1 = h_2 = 0$ ).

- L'irradiation, uniformément répartie sur la face avant est un Dirac d'énergie.

- Le défaut est un disque de rayon  $b$ , de résistance uniforme  $R_c$ .

A l'interface, le contact est parfait hors du défaut.

Ainsi

$$\phi_0(r, p) = \phi_0$$

$$R(r) = R_c \quad 0 \leq r \leq b$$

$$R(r) = 0 \quad r > b.$$

Les quantités définies dans l'annexe A deviennent :

$$A_0 = \frac{\phi_0}{\lambda \beta_0 \sinh \beta_0 e_1}$$

$$A_n = 0$$

$$B_{n1} = B_{n2} = B_n = \frac{a_n}{\lambda \beta_n}$$

$$B_{01} = B_{02} = B_0 = \frac{a_0}{\lambda \beta_0}$$

avec

$$a_n = \frac{2}{l^2} \int_0^l r \phi(r, p) J_0(\alpha_n r) \, dr$$

$$a_0 = \frac{2}{l^2} \int_0^l r \phi(r, p) \, dr$$

Et les transformées de Laplace des températures dans les milieux 1 et 2 s'écrivent :

$$\theta_1(r, z, p) = \frac{\phi_0}{\lambda \beta_0 \sinh \beta_0 e_1} \cosh \beta_0 z - \frac{a_0 \cosh \beta_0 (e_1 - z)}{\lambda \beta_0 \sinh \beta_0 e_1} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \cosh \beta_n (e_1 - z)}{\lambda \beta_n \sinh \beta_n e_1} J_0(\alpha_n r)$$

$$\theta_2(r, z, p) = \frac{a_0 \cosh \beta_0 (z + e_2)}{\lambda \beta_0 \sinh \beta_0 e_2} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \cosh \beta_n (z + e_2) J_0(\alpha_n r)}{\lambda \beta_n \sinh \beta_n e_2}$$

Dans le modèle à 4 flux,  $\phi(r, p)$  est assimilée à une fonction à 4 escaliers (voir Fig. 3).

On remplace l'expression de  $\phi(r, p)$  dans  $a_0$  et  $a_n$  :

$$a_0 = \phi_3 d^{*2} + \phi_4 (b^{*2} - d^{*2}) + \phi_1 (c^{*2} - b^{*2}) + \phi_2 (1 - c^{*2})$$

$$a_n = \frac{2}{\omega_n J_0^2(\omega_n)} [\phi_3 (d^* J_1(\omega_n d^*)) + \phi_4 (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) + \phi_1 (c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*)) - \phi_2 c^* J_1(\omega_n c^*)]$$

en posant :

$$\omega_1 = \alpha_n l$$

$$d^* = d/l$$

$$b^* = b/l$$

$$c^* = c/l$$

*Calcul des  $\phi_i$*

On calcule  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  en écrivant l'équation de passage en température :

$$\theta_1(r, z = 0, p) - \theta_2(r, z = 0, p) = R(r) \phi(r, p)$$

en valeur moyenne sur chacun des 4 intervalles où le flux est constant.

Au préalable, on introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

- $e_1^* = \frac{e_1}{e_1 + e_2}$
- $z^* = \frac{z}{e}$
- $p^* = \frac{p}{a} (e_1 + e_2)^2$
- $\beta_0^* = \sqrt{p^*}$
- $(\beta_n^*)^2 = p^* + \alpha_n^2 (e_1 + e_2)^2$
- $r^* = \frac{r}{l}$
- $R_c = \frac{R_c}{e/\lambda}$

et on pose :

$$F = \sinh \beta_0^* e_1^* \left[ \frac{1}{\tanh \beta_0^* e_1^*} + \frac{1}{\tanh \beta_0^* e_2^*} \right]$$

$$I_n = \frac{2\beta_0^*}{\beta_n^* \omega_n^*} \sinh \beta_0^* e_1^* \left[ \frac{1}{\tanh \beta_n^* e_1^*} + \frac{1}{\tanh \beta_n^* e_2^*} \right].$$

1ère relation :  $0 \leq r \leq d \quad \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = R_c \phi_3.$

Cette relation donne :

$$\begin{aligned} \phi_0 = \phi_3 & \left[ d^{*2} F + R_c^* \beta_0^* \sinh \beta_0^* e_1^* + \sum_{n \geq 1} \frac{2I_n d^* J_1^2(\omega_n d^*) d^*}{d^{*2} J_0^2(\omega_n)} \right] \\ & + \phi_4 \left[ (b^{*2} - d^{*2}) F + \sum_{n \geq 1} \frac{2I_n d^* J_1(\omega_n d^*)}{d^{*2} J_0^2(\omega_n)} \right. \\ & \left. \times (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) \right] \\ & + \phi_1 \left[ (c^{*2} - b^{*2}) F + \sum_{n \geq 1} \frac{2I_n d^* J_1(\omega_n d^*)}{d^{*2} J_0^2(\omega_n)} \right. \\ & \left. \times (c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*)) \right] \\ & + \phi_2 \left[ (1 - c^{*2}) F + \sum_{n \geq 1} \frac{2I_n d^* J_1(\omega_n d^*)}{d^{*2} J_0^2(\omega_n)} (-c^* J_1(\omega_n c^*)) \right] \end{aligned}$$

de la forme :  $\phi_0 = A_1 \phi_1 + B_1 \phi_2 + C_1 \phi_3 + D_1 \phi_4.$

2ème relation :  $d < r \leq b \quad \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = R_c \phi_4.$

On obtient :

$$\begin{aligned} \phi_0 = \phi_3 & \left[ F d^{*2} + \sum_{n \geq 1} 2 \frac{I_n}{b^{*2} - d^{*2}} (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) \right. \\ & \left. \times \frac{d^* J_1(\omega_n d^*)}{J_0^2(\omega_n)} \right] + \phi_4 \left[ F (b^{*2} - d^{*2}) + R_c^* \beta_0^* \sinh \beta_0^* e_1 \right. \\ & \left. + \sum_{n \geq 1} \frac{2I_n (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*))}{(b^{*2} - d^{*2}) J_0^2(\omega_n)} \right] \\ & + \phi_1 \left[ F (c^{*2} - b^{*2}) + \sum_{n \geq 1} \frac{2I_n}{b^{*2} - d^{*2}} \right. \\ & \left. \times \frac{(b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) (c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*))}{J_0^2(\omega_n)} \right] \\ & + \phi_2 \left[ (1 - c^{*2}) F \right. \\ & \left. + \sum \frac{2I_n (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) (-c^* J_1(\omega_n c^*))}{(b^{*2} - d^{*2}) J_0^2(\omega_n)} \right] \end{aligned}$$

de la forme :  $\phi_0 = A_2 \phi_1 + B_2 \phi_2 + C_2 \phi_3 + D_2 \phi_4.$

3ème relation :  $b < r \leq c \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$

$$\begin{aligned} \phi_0 = \phi_3 & \left[ d^{*2} F + \sum \frac{2I_n}{(c^{*2} - b^{*2}) J_0^2(\omega_n)} (c^* J_1(\omega_n c^*) \right. \\ & \left. - b^* J_1(\omega_n b^*)) d^* J_1(\omega_n d^*) \right] + \phi_4 \left[ (b^{*2} - d^{*2}) F \right. \\ & \left. + \sum \frac{2I_n}{(c^{*2} - b^{*2}) J_0^2(\omega_n)} (c^* J_1(\omega_n c^*) \right. \\ & \left. - b^* J_1(\omega_n b^*)) (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) \right] \\ & + \phi_1 \left[ (c^{*2} - b^{*2}) F + \sum \frac{2I_n}{(c^{*2} + b^{*2}) J_0^2(\omega_n)} (c^* J_1(\omega_n c^*) \right. \\ & \left. - b^* J_1(\omega_n b^*))^2 \right] + \phi_2 \left[ (1 - c^{*2}) F + \sum \frac{2I_n}{(c^{*2} - b^{*2}) J_0^2(\omega_n)} \right. \\ & \left. \times (c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*)) (-c^* J_1(\omega_n c^*)) \right] \end{aligned}$$

de la forme  $\phi_0 = A_3 \phi_1 + B_3 \phi_2 + C_3 \phi_3 + D_3 \phi_4.$

4ème relation :  $c < r \leq l \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$

$$\begin{aligned} \phi_0 = \phi_3 & \left[ d^{*2} F + \sum \frac{2I_n (-c^* J_1(\omega_n c^*))}{(1 - c^{*2}) J_0^2(\omega_n)} d^* J_1(\omega_n d^*) \right] \\ & + \phi_4 \left[ (b^{*2} - d^{*2}) F + \sum \frac{2I_n (-c^* J_1(\omega_n c^*))}{(1 - c^{*2}) J_0^2(\omega_n)} \right. \\ & \left. \times (b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)) \right] \\ & + \phi_1 \left[ (c^{*2} - b^{*2}) F + \sum \frac{2I_n (-c^* J_1(\omega_n c^*))}{(1 - c^{*2}) J_0^2(\omega_n)} \right. \\ & \left. \times (c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*)) \right] \\ & + \phi_2 \left[ (1 - c^{*2}) F + \sum \frac{2I_n (-c^* J_1(\omega_n c^*))^2}{(1 - c^{*2}) J_0^2(\omega_n)} \right] \end{aligned}$$

de la forme  $\phi_0 = A_4 \phi_1 + B_4 \phi_2 + C_4 \phi_3 + D_4 \phi_4.$

Nous disposons donc d'un système de 4 équations aux 4 inconnues  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 :$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_0 \\ \phi_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$$

que nous résolvons avec la méthode de Gauss.

Expression de la température

On pose  $\phi_i = \phi_0 / K_i.$

On réduit la température  $\theta^* = \theta \lambda / \phi_0 e.$

• Face avant :

$$\begin{aligned} \theta_1^*(z^* = e_1^*) &= \frac{1}{\beta_0^* \tanh \beta_0^* e_1^*} - \frac{1}{\beta_0^* \sinh \beta_0^* e_1^*} \\ & \times \left( \frac{d^{*2}}{K_3} + \frac{b^{*2} - d^{*2}}{K_4} + \frac{c^{*2} - b^{*2}}{K_1} + \frac{1 - c^{*2}}{K_2} \right) \\ & - \sum_{n \geq 1} \frac{2J_0(\omega_n r^*)}{\beta_n^* \sinh \beta_n^* e_1^* \omega_n J_0^2(\omega_n)} \left[ \frac{d^* J_1(\omega_n d^*)}{K_3} \right. \\ & \left. + \frac{b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)}{K_4} + \frac{c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*)}{K_1} \right. \\ & \left. - \frac{c^* J_1(\omega_n c^*)}{K_2} \right]. \end{aligned}$$

• Face arrière :

$$\begin{aligned} \theta_2^*(z^* = e_2^*) &= \frac{1}{\beta_0^* \sinh \beta_0^* e_2^*} \left[ \frac{d^{*2}}{K_3} + \frac{b^{*2} - d^{*2}}{K_4} \right. \\ & \left. + \frac{c^{*2} - b^{*2}}{K_1} + \frac{1 - c^{*2}}{K_2} \right] + \sum \frac{2J_0(\omega_n r^*)}{\beta_n^* \sinh \beta_n^* e_2^* \omega_n J_0^2(\omega_n)} \\ & \times \left[ \frac{d^* J_1(\omega_n d^*)}{K_3} - \frac{c^* J_1(\omega_n c^*)}{K_2} + \frac{b^* J_1(\omega_n b^*) - d^* J_1(\omega_n d^*)}{K_4} \right. \\ & \left. + \frac{c^* J_1(\omega_n c^*) - b^* J_1(\omega_n b^*)}{K_1} \right]. \end{aligned}$$

TWO-DIMENSIONAL MODELLING OF A DEFECT: APPLICATION TO THERMAL  
DETECTION IN ANISOTROPIC MULTILAYER COMPOSITE MATERIALS

**Abstract**—In order to detect defects in composite materials or at the interface between two materials, we model conductive heat transfer in a slab with a subsurface defect which is assimilated to a thermal resistance (varying in space). A semi-analytical method is developed, where the flux density at the level of the defect is more or less finely discretized. This method allows two different approaches: either a very precise resolution, or a very quick calculation, which is necessary for *in situ* detection. In every case where the geometry is simple, this method proves more efficient than purely numerical techniques.

DIE ANWENDUNG EINER ZWEIDIMENSIONALEN MODELLIERUNG BEI DER  
THERMISCHEN BESTIMMUNG EINES DEFEKTES IN ANISOTROPEN, MEHRSCHICHTIG  
ZUSAMMENGESETZTEN MATERIALIEN

**Zusammenfassung**—Um Störstellen in zusammengesetzten Materialien oder an der Kontaktfläche zweier Materialschichten zu bestimmen, wird die Wärmeleitung in einer Platte mit einem inneren Defekt modellhaft beschrieben. Der innere Defekt wird durch einen zusätzlichen Kontaktwiderstand berücksichtigt. Ein halbanalytisches Verfahren wird entwickelt, bei dem die Wärmestromdichte in unmittelbarer Nähe des Defektes mehr oder weniger fein diskretisiert wird. Dieses Verfahren ermöglicht zwei unterschiedliche Lösungswege: Entweder eine sehr genaue Auflösung oder eine sehr schnelle Berechnung, die für die "*in situ*" Detektierung notwendig ist. Für alle Anwendungsfälle mit einfacher Geometrie ist das Verfahren effizienter als ein rein numerisches Verfahren.

ДВУМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФЕКТА: ПРИМЕНЕНИЕ К СЛУЧАЮ  
ТЕРМИЧЕСКОГО ДЕТЕКТИРОВАНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ  
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

**Аннотация**—С целью обнаружения дефектов в композитных материалах или на границе раздела двух материалов моделируется кондуктивный теплоперенос в пластине с поверхностным дефектом, который связывался с тепловым сопротивлением (изменяющимся в пространстве). Разработан полуаналитический метод, в котором плотность потока на уровне дефекта является более или менее мелко дискретизированной. Указанный метод делает возможным два различных подхода к решению: или очень точное решение, или очень быстрый расчет, необходимый для детектирования *in situ*. В любом случае с простой геометрией применение этого метода оказывается более эффективным, чем использование просто численных методов.